APROBADO
Por Bernardo Cascales fecha 8:28 , 20/12/2011

13/Nov/2007

Ángulos orientados

Definición

Dado un par ordenado (u,v) de vectores no nulos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ (que se supone identificado con $\mathbb{C}$) el *ángulo orientado* del par (u,v) es el número real $\operatorname{Arg}(v/u)\in(-\pi,\pi]$.

Definición: conservación ángulos orientados

$f:\Omega\to\mathbb{C}$, definida en un abierto $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, conserva ángulos orientados en $a\in\Omega$ cuando cumple las condiciones siguientes:

a) Para cada $u\in\mathbb{C}$ con $|u|=1$, existe $\delta_u>0$ tal que $D(a,\delta_u)\subseteq\Omega$ y

$$f(a+tu)-f(a)\neq 0 \quad \text{si} \quad 0<t<\delta_u.$$

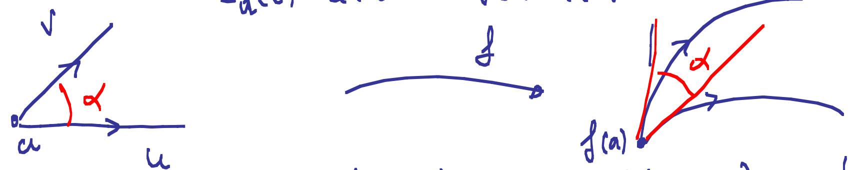
b) Para cada $u\in\mathbb{C}$ con $|u|=1$ el siguiente límite existe y no depende de u:

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(a+tu)-f(a)}{u|f(a+tu)-f(a)|}=c$$

FINAL

La interpretación geométrica es la siguiente

$z_u(t)=a+tu$ $\quad z_v(t)=a+tv$ $\quad t\geq 0$



$\sigma_u(t)=f(a+tu)$ $\quad \sigma_v(t)=f(a+tv)$ $\quad t\geq 0$

σ_u y σ_v son las imagenes de z_u y z_v y los vectores tangente a σ_u y σ_v en $f(a)$ forman el mismo ángulo orientado. Efectivamente, ya que numerador y denominador $\to c$

$$\frac{\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{|f(a+tv)-f(a)|v}}{\dfrac{f(a+tu)-f(a)}{|f(a+tu)-f(a)|u}} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{\dfrac{\sigma_v'(0)}{|\sigma_v'(0)|v}}{\dfrac{\sigma_u'(0)}{|\sigma_u'(0)|u}} \overset{\uparrow}{=} 1 \rightsquigarrow \frac{\dfrac{\sigma_v'(0)}{|\sigma_v'(0)|}}{\dfrac{\sigma_u'(0)}{|\sigma_u'(0)|}} = \frac{v}{u} \quad \#$$

Proposición

Para una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son equivalentes:

a) L conserva ángulos orientados en 0.

b) L conserva ángulos orientados en todos los puntos.

c) L es no singular y para cada par u, v con $|u| = |v| = 1$ se tiene que $\operatorname{Arg}(\frac{Lv}{Lu}) = \operatorname{Arg}(\frac{v}{u})$.

d) L es $\mathbb{C}$-lineal, no nula.

FINAL

Demostración.- a) $\Longleftrightarrow$ b) es consecuencia inmediata de la linealidad ya que para todo $a \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\frac{L(a+tu) - L(a)}{|L(a+tu) - L(a)|\,u} = \frac{L(0+tu) - L(0)}{|L(0+tu) - L(0)|\,u}$$

(a) $\Rightarrow$ (d) L conserva angulos orientados en $\underline{\underline{0}}$, se traduce en que para cada $|u|=1$, $\exists\ \delta_u > 0$. $0 < t < \delta_u \rightsquigarrow L(tu) \neq L(0) = 0$ $\rightsquigarrow L(u) = 0$ y así L es inyectiva.

$$\frac{L(tu)}{|L(tu)|\,u} \longrightarrow c = \frac{L(u)}{|L(u)|\,u} \rightsquigarrow \frac{L(u)}{|L(u)|\,u} = \frac{L(v)}{|L(v)|\,v} \rightsquigarrow$$

independiente de $\underline{\underline{u}}$

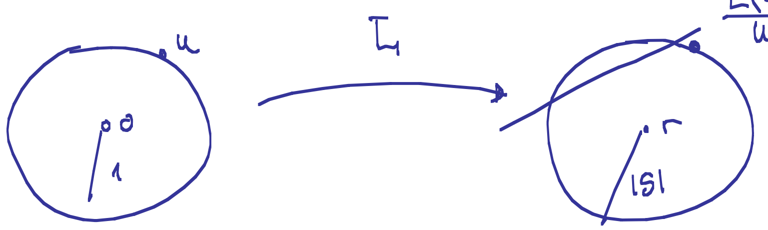
$$\frac{\frac{L(v)}{|L(v)|}}{\frac{L(u)}{|L(u)|}} = \frac{v}{u}$$ y acaba la prueba de la implicación.

(a) $\Rightarrow$ (d) $L = r\,dz + s\,d\bar{z}$ $\quad dz : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \rightsquigarrow z$ $\quad d\bar{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \rightsquigarrow \bar{z}$

Probaremos que $s = 0$.

Para $|u| = 1$ se tiene $L(u) = ru + s\bar{u} \rightsquigarrow \frac{L(u)}{u} = r + s\frac{\bar{u}}{u}$

$\left\{\frac{L(u)}{u} : |u| = 1\right\}$ está en una circunferencia, centrada en r y de radio $|s|$.



$\frac{L(u)}{u}$ está en una circunferencia y en una recta.

Por otro lado aplicando (iii) a $(1, u)$ se obtiene

$$\mathrm{Arg}(u) = \mathrm{Arg}\left(\frac{L(u)}{L(1)}\right) \rightsquigarrow \frac{L(u)}{L(1)} = \rho u \quad \text{adecuado } \rho$$

$$\frac{L(u)}{u} = \rho\, L(1) \rightsquigarrow \left\{\frac{L(u)}{u} : |u|=1\right\}$$ está en la recta $\{t\cdot L(1) : t\in\mathbb{R}\}$ y también en la circunferencia $\{z\in\mathbb{C} : |z-r|=|s|\}$

Para que estas dos condiciones sean compatibles $s=0$. #

Proposición

Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es diferenciable en $a\in\Omega$ con $df(a)\neq 0$, son equivalentes

a) f conserva ángulos orientados en a.

b) f es derivable en a en sentido complejo y $f'(a)\neq 0$ (e.d. $df(a)$ conserva ángulos orientados).

Demostración.- b) $\Rightarrow$ a) Si existe $f'(a)$ y $f'(a)\neq 0$, entonces f conserva ángulos orientados

$$\frac{f(a+tu)-f(a)}{|f(a+th)-f(a)|} = \frac{\frac{f(a+tu)-f(a)}{tu}}{\left|\frac{f(a+tu)-f(a)}{tu}\right|} \longrightarrow \frac{f'(a)}{|f'(a)|} \quad \text{independ. } |u|=1$$

a) $\Rightarrow$ b) Sea $L = df(a)$ distinguimos dos casos:

CASO 1.- L es inyectiva ($L(u)\neq 0$, $|u|=1$). Si suponemos que f conserva angulos orientados se tiene que:

$$C = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} \cdot \frac{1}{\left|\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}\right| u} = \frac{L(u)}{|L(u)|\, u} \text{ para cada } |u|=1.$$

De aquí se sigue que:

$\left\{ \frac{L(u)}{u} : |u|=1 \right\}$ está en una recta pero a la vez por los argumentos de una proposición anterior sabemos que está en una circunferencia. $\curvearrowright$ $L(z)=\mu z$ para algún $\mu \neq 0$ y en consecuencia f es derivable en sentido complejo, con $f'(a)=\mu \neq 0$.

CASO 2.- Si se supone que $\{w \in \mathbb{C} : L(w)=0\}$ es una recta que pasa por el origen $\rightsquigarrow$ se llega a la misma conclusión $L(z)=\mu z$ $\mu \neq 0$. Así la tesis es la misma y la suposición de partida no puede darse. El alumno debe comprobar como EJERCICIO que esto es así. #

Proposición

Para una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ son equivalentes

a) f conserva ángulos orientados en $a \in \Omega$.

b) $f'(a) \neq 0$.

FINAL

Demostración.- La prueba b) $\Rightarrow$ a) se sigue de la demostración anterior. La prueba a) $\Rightarrow$ b) es como sigue.. Supongamos que f es holomorfa y $f'(a)=0$.. Para un disco suficientemente pequeño $D(a,r) \subset \Omega$ se tiene que

$$f(z)-f(a) = (z-a)^m g(z) \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} g \in \mathcal{H}(D(a,r)) \\ g(z) \neq 0 \ \forall z \in D(a,r) \\ m > 1 \end{array}$$

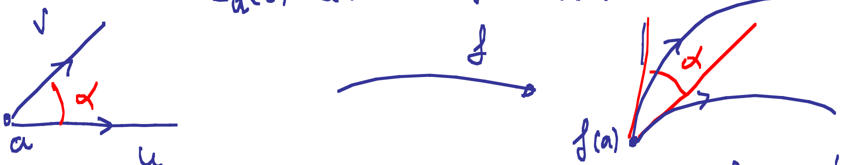
Así, se tiene que: para $|u|=1$,

$$\frac{f(a+tu)-f(a)}{|f(a+tu)-f(a)|\,u} = \frac{(tu)^m g(a+tu)}{t^m\,|g(a+tu)|\,u} \longrightarrow u^{m-1}\frac{g(a)}{|g(a)|} \quad (**)$$

y el límite sí depende de $|u|=1$, luego no conserva ángulos #

$\boxed{\text{Observación}}$ Con la notación empleada en la pág 1

$z_u(t)=a+tu \qquad z_v(t)=a+tv \qquad t\geq 0$



$\sigma_u(t)=f(a+tu) \qquad \sigma_v(t)=f(a+tv) \qquad t\geq 0$

Si $f\in\mathcal{H}(D(a,r))$ y $f'(a)=0$ y $m>1$ es la multiplicidad de $\underline{a}$ como cero de $f(z)-f(a)$, al calcular el límite $(**)$ para $|u|$ y $|v|=1$ se tiene; llamando $c=g(a)/|g(a)|\neq 0$

$$\underset{\approx}{u} \qquad u^{m-1}\cdot c = (**) = \frac{\sigma_u'(0)}{|\sigma_u'(0)|\,u}$$

$$\underset{\approx}{v} \qquad v^{m-1}\cdot c = (**) = \frac{\sigma_v'(0)}{|\sigma_v'(0)|\,v}$$

$$\curvearrowright \qquad \frac{\sigma_u'(0)/|\sigma_u'(0)|}{\sigma_v'(0)/|\sigma_v'(0)|} = \left(\frac{u}{v}\right)^m$$

$\rightsquigarrow$ La función f multiplica por $\underline{\underline{m}}$ los ángulos.

<u>Ejemplo.-</u> $f(z)=z^2$, $f(z)=z^3$, ... duplican, triplican ángulos en $z=0$. #

Vamos a demostrar ahora el T$^{\underline{ma}}$ de la aplicación abierta tal y como está enunciado debajo. Para ello demostraremos primero las proposiciones que siguen y al final el T$^{\underline{ma}}$ de la aplicación abierta.

Teorema de la Aplicación abierta

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no constante. entonces f es una aplicación abierta. Más concretamente, para cada $a \in \Omega$ si m es la multiplicidad de a como cero de $f - f(a)$, se puede determinar un entorno abierto $U_a \subset \Omega$ de a y $V_b \subset f(\Omega)$ entorno abierto de $b = f(a)$ tal que la $f - f(w)$ tiene exactamente m ceros distintos en U_a para cada $w \in V_b \setminus \{b\}$.

FINAL

Teorema de la función inversa

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$ existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega$, y un entorno abierto V_b de $b = f(a)$, tales que $f|_{U_a}$ es inyectiva, $V_b = f(U_a)$ y la inversa $g = (f|_{U_a})^{-1} : V_b \to U_a$ es holomorfa.

Demostración.- Bajo las hipótesis del teorema, si miramos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ como una aplicación de varias variables reales tenemos que

$$df(a)(z) = f'(a) \cdot z$$

es invertible, y así el T$^{\underline{ma}}$ de la función inversa para funciones de varias variables reales nos asegura los entornos U_a y U_b requeridos estableciendo entonces $f|_{U_a} : U_a \longmapsto U_b$ en C^1-difeomorfismo.

para el que podemos suponer que $df(z)$ es invertible para cada $z \in U_a$ i.e., $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in U_a$. Como $f^{-1} : U_b \longmapsto U_a$ es continua tenemos que para cada $w \in U_b$ será

$$\frac{f^{-1}(w+h) - f^{-1}(w)}{(w+h) - w} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(w+h)) - f(f^{-1}(w))}{f^{-1}(w+h) - f^{-1}(w)}} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \neq 0$$

y así la inversa f^{-1} es holomorfa. #

Proposición: pre-Teorema de la Aplicación abierta

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y a un cero aislado de $f(z)-f(a)$ de multiplicidad m. Entonces existe un entorno abierto $U_a \subset \Omega$ un disco $D(0,\delta)$ y una biyección $\varphi : U_a \to D(0,\delta)$ tales que

FINAL

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)^m \quad \text{para todo} \quad z \in U_a$$

y $\varphi'(z) \neq 0$, $(\varphi^{-1})'(w) \neq 0$ para cada $z \in U_a$ y $w \in D(0,\rho)$.

Demostración.- Como a es un cero aislado de $f(z)-f(a)$ de multiplicidad m, existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que

$$f(z)-f(a) = (z-a)^m g(z) \quad \text{donde} \quad g(z) \neq 0 \ \forall z \in D(a,r)$$
$$g \in \mathcal{H}(D(a,r)).$$

Tomemos $\psi \in \mathcal{H}(D(a,r))$ tal que $(\psi(z))^m = g(z)$. Así, se tiene que

$$f(z)-f(a) = ((z-a)\psi(z))^m = (\varphi(z))^m \quad \text{donde} \quad \varphi : D(a,r) \to \mathbb{C}$$

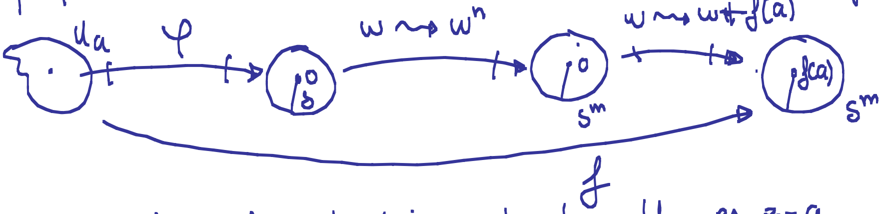
está dada por $\varphi(z) = (z-a)\psi(z)$. Así $\varphi \in \mathcal{H}(D(a,r))$, $\varphi(a) = 0$ y

$$\varphi'(z) = \psi(z) + (z-a)\psi'(z) \rightsquigarrow \varphi'(a) = \psi(a) \neq 0.$$

Aplicando el $T^{\underline{ma}}$ de la función inversa, $\exists W_a \subset D(a,r)$ entorno de $\underline{\underline{a}}$ y $V_0 \subset \mathbb{C}$ entorno de cero tal que $\varphi : W_a \longleftrightarrow V_0$ es biyección con $\varphi'(z) \neq 0$ y $(\varphi^{-1})'(w) \neq 0$ para cada $z \in W_a$, $w \in V_0$. Tomamos $\delta > 0$ tal que $D(0,\delta) \subset V_0$ y tomamos $U_a := f^{-1}(V_0) \subset W_a \subset D(a,r)$. #

Demostración $T^{\underline{ma}}$ Aplicación Abierta.- f es no cte y $a \in \Omega \rightsquigarrow a$ es un cero aislado de $f(z)-f(a)$: si fijamos $\underline{\underline{m \geq 1}}$ su multiplicidad entonces utilizamos la proposición anterior para determinar U_a, $D(0,\delta)$ y φ como allí.

FINAL



Si consideramos $f(z)-f(a)$ la única solución en U_a es $z=a$.
Si consideramos $f(z)-w$, $w \in D^*(f(a),\delta^m)$ las soluciones son $z \neq a$. Ahora bien al derivar se tiene $(f(z)-w)' = f'(z) = m(\varphi(z))^{m-1} \cdot \varphi'(z) \neq 0$ y así los ceros son simples y hay $\underline{\underline{m}}$ #

Definición

Una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ se dice que es conforme en un punto $a\in\Omega$ si es holomorfa en a y $f'(a)\neq 0$. f se dice conforme en Ω si f es conforme en cada $a\in\Omega$. Un isomorfismo conforme de un abierto Ω_1 sobre un abierto Ω_2 es una biyección $f:\Omega_1\to\Omega_2$ tal que f y f^{-1} son conformes.

FINAL

Proposición

Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ abierto y $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ inyectiva. Entonces para cada $a\in\Omega$ $f'(a)\neq 0$, $G=f(\Omega)$ es abierto y la inversa $f^{-1}:G\to\Omega$ es holomorfa. Consecuentemente, $(f^{-1})'(b)\neq 0$ para cada $b\in G$ y así f es un isomorfismo conforme de Ω sobre $f(\Omega)$.

FINAL

Demostración.- No es restrictivo suponer que Ω es conexo (nos restringimos a cada componente conexa de Ω). Así $f(\Omega)$ es abierto y $f:\Omega\longmapsto f(\Omega)=G$ es biyectiva y holomorfa $\leadsto$ $f'(a)\neq 0$ para cada $a\in\Omega$ por el Teorema de la Aplicación Abierta y f es ABIERTA $\leadsto$ f^{-1} es continua. Así si tomamos $b=f(a)\in G$ tenemos

$$\frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{(b+h)-b}=\frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(b+h))-f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}}\xrightarrow[h\to 0]{}\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\neq 0 \quad \#$$

Corolario

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos y $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una biyección holomorfa. Entonces f es un isomorfismo conforme.

FINAL

Definición

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos. Denotamos por $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ el conjunto de isomorfismos conformes de Ω_1 sobre Ω_2. Si $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2) \neq \emptyset$ se dice que Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes. Si $\Omega_1 = \Omega_2 =: \Omega$ escribimos $\Gamma(\Omega) := \Gamma(\Omega, \Omega)$.

Problema General en Representación Conforme

Decidir si dos abiertos Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes y en su caso encontrar un isomorfismo conforme entre ellos, mejor aún, determinar $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$.

Nota:

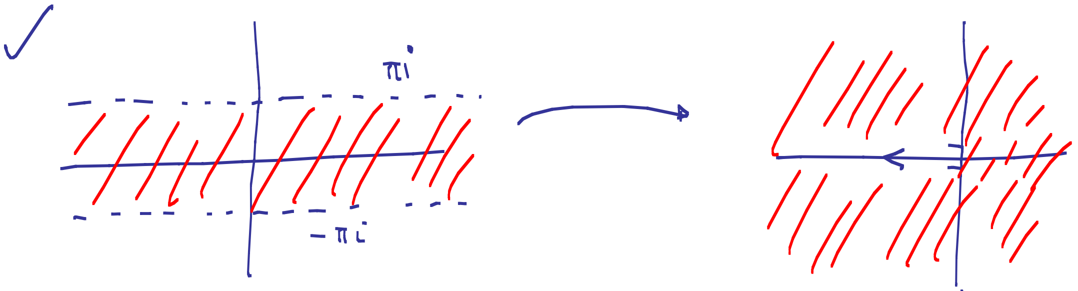
✓ $$\Omega_1 \xrightarrow{\psi} \Omega_1 \xrightarrow[\text{particular}]{f} \Omega_2 \xrightarrow{\varphi} \Omega_2$$

$$\Gamma(\Omega_1, \Omega_2) = \{ f \circ \psi : \psi \in \Gamma(\Omega_1) \} = \{ \varphi \circ f : \varphi \in \Gamma(\Omega_2) \}.$$

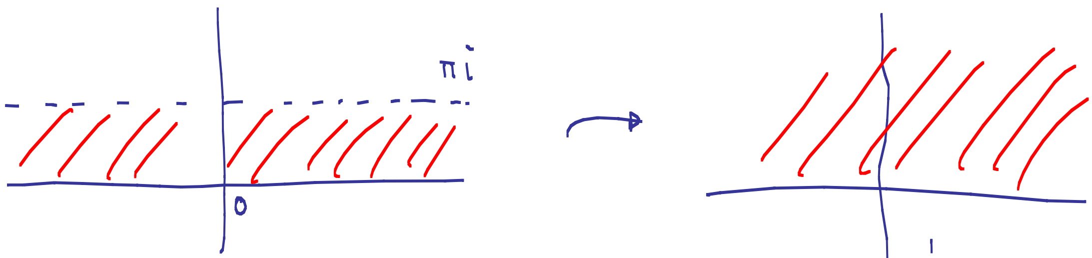
✓ $$\Omega_1 \xrightarrow{f^{-1}} \Omega_1 \xrightarrow{\varphi} \Omega_1 \xrightarrow[\text{particular}]{f} \Omega_2$$

$$\Gamma(\Omega_2) = f \circ \Gamma(\Omega_1) \circ f^{-1}$$

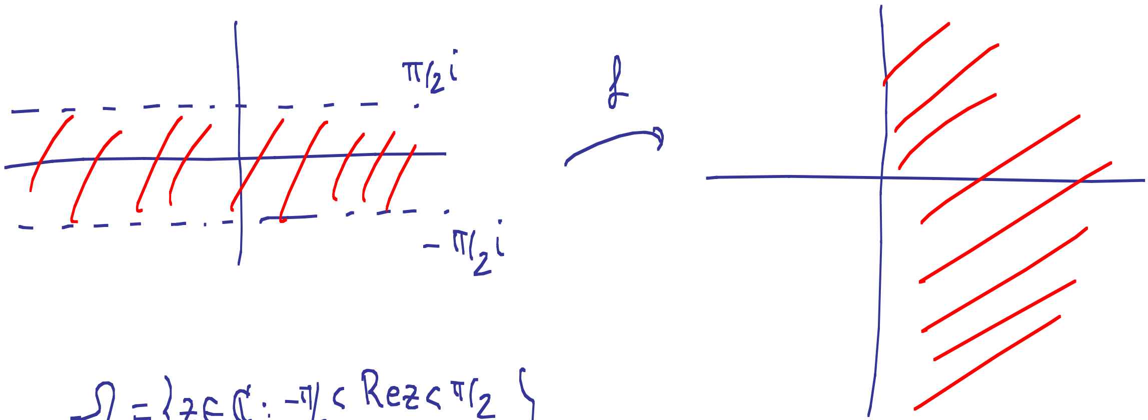
Ejemplos.– Si tomamos la función exponencial $z \overset{f}{\mapsto} e^z$, entonces f establece isomorfismos conformes entre los abiertos que se indican debajo.



en la imagen no está $\mathbb{R}^-$



$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi \}$ $\qquad$ $f(\Omega) = \{ z \in \Omega : \operatorname{Im} z > 0 \}$



$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2 \}$

$f(\Omega) = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \}$

✓ Las aplicaciones $z \rightsquigarrow e^{i\alpha z} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ establecen biyecciones holomorfas del disco unidad $D(0,1)$ en sí mismo. Todas las biyecciones holomorfas de $D(0,1)$ en sí mismo vienen dadas por una expresión de ese tipo. #

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

- El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado* ($\infty \notin \mathbb{C}$).
- En $\mathbb{C}_\infty$ adoptamos la aritmética usual con ∞.
- $\mathbb{C}_\infty$ se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto:
  - Los entornos de los puntos de $a \in \mathbb{C}$ son por definición los entornos en $\mathbb{C}_\infty$.
  - Para $a = \infty$ una base de entornos en $\mathbb{C}_\infty$ viene dada por:

    $$V_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\},$$

    tomando todos los $r > 0$.
- $\mathbb{C}_\infty$ se puede identificar con

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

La identificación se hace mediante la proyección estereográfica que es la aplicación que definimos en la proposición que sigue:

Proposición

La aplicación $\Psi : \mathbb{C}_\infty \to S$ dada por $\Psi(\infty) = (0,0,1) =: N$ y

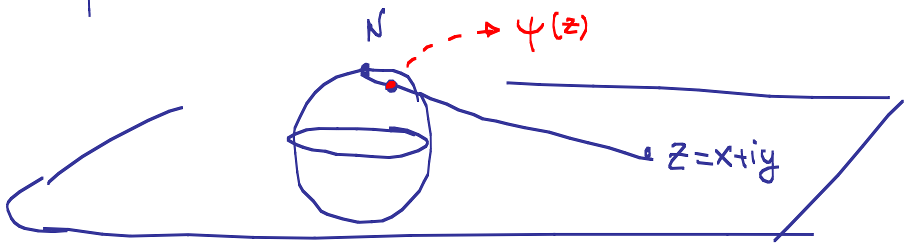
$$\Psi(x+iy) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), z = (x+iy) \in \mathbb{C},$$

es una biyección cuya inversa es

$$\Psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Ψ establece un homeomorfismo entre $\mathbb{C}_\infty$ y S.

Demostración.- Empezamos por ver geométricamente quién es Ψ: a partir de ahí las cuentas son sencillas. $\mathbb{C}$ se considera sumergido en $\mathbb{R}^3$ como el plano $\mathbb{C} \cong \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$



Para $z=x+iy$, $\varphi(z)$ es la intersección con S^1 de la recta que en $\mathbb{R}^3$ para por $(x,y,0)$ y el Polo norte de S, $N=(0,0,1)$.

La ecuación de la recta $\overline{NZ}$ es:

$$\overline{NZ} \equiv (0,0,1) + t\big((x,y,0)-(0,0,1)\big) = (0,0,1) + (tx,ty,t) =$$
$$= (tx, ty, 1-t)$$

$\overline{NZ}$ tiene dos puntos de intersección con la esfera que son

$$t=0 \curvearrowright N=(0,0,1)$$
$$t\neq 0 \curvearrowright (tx)^2+(ty)^2+(1-t)^2=1 \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow t^2x^2+t^2y^2+\cancel{1}-2t+t^2=\cancel{1} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow t\left[t\,(x^2+y^2+1)-2\right]=0 \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow t=\frac{2}{1+|z|^2}$$ y así tenemos que

El punto de corte es:

$$tx=\frac{2x}{1+|z|^2}=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2} \qquad ty=\frac{2y}{1+|z|^2}=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)} \qquad 1-t=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$$

Se comprueba que la función inversa en la expresión dada.

Así φ es una biyección continua entre compactos y por tanto φ es un homeomorfismo. #

Definición

La aplicación Ψ considerada en la proposición anterior recibe el nombre de *proyección estereográfica*.

Proposición

La proyección estereográfica transforma rectas y círculos de $\mathbb{C}_\infty$ en circunferencias de S. La proyección estereográfica conserva ángulos orientados.

Definición

La distancia cordal en $\mathbb{C}_\infty$ se define por las fórmulas

$$d_\infty(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \quad \text{si} \quad z,w \in \mathbb{C}$$

$$d_\infty(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad \text{si} \quad z \in \mathbb{C}$$

Proposición

d_∞ es la distancia obtenida en $\mathbb{C}_\infty$ al trasladar la distancia euclídea en S mediante la proyección estereográfica Ψ. Se tienen las siguientes propiedades:

- d_∞ está acotada por 2,
- la topología asociada a d_∞ es la topología de $\mathbb{C}_\infty$;
- d_∞ restringida a $\mathbb{C}$ no es uniformemente equivalente a la distancia usual;
- la aplicación $z \to \frac{1}{z}$ es una isometría para d_∞ que interpretada en S corresponde a un giro de 180^0 alrededor del eje OX.

Demostración.– Sean $z, z' \in \mathbb{C}$ dos puntos y tomemos las imagenes de z, z' mediante la proyección estereográfica $\psi(z) = (x_1, x_2, x_3)$ $\psi(z') = (x_1', x_2', x_3')$. Tenemos

$$\left(d_\infty(z,z')\right)^2=(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2=2-2(x_1x_1'+x_2\cdot x_2')+x_3x_3')=$$

$$=2-2\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}\cdot\frac{z'+\bar{z}'}{1+|z'|^2}+\frac{(-i)(z-\bar{z})(-i)(z'-\bar{z}')}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}+\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\cdot\frac{|z'|^2-1}{1+|z'|^2}\right)=$$

$$=2-\frac{2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\Big(\cancel{zz'}+z\bar{z}'+\bar{z}z'+\cancel{\bar{z}\cdot\bar{z}'}-\cancel{zz'}+z\bar{z}'+\bar{z}z'-\cancel{\bar{z}\bar{z}'}+$$

$$+(|z|^2-1)(|z'|^2-1)\Big)=$$

$$=2-\frac{2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\left(2z\bar{z}'+2\bar{z}z'+|z\cdot z'|^2-|z|^2-|z'|^2+1\right)=$$

$$=\frac{\cancel{2|z|^2|z'|^2}+\cancel{2}+2|z|^2+2|z'|^2-4(z\bar{z}'+\bar{z}z')-\cancel{2|z\cdot z'|^2}+2|z|^2+2|z'|^2-\cancel{2}}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}=$$

$$=\frac{4(|z|^2+|z|'-z\cdot\bar{z}'-\bar{z}\cdot z')}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}=$$

$$=\frac{4|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}.$$

En el caso en el que $z'=\infty$, la fórmula que se obtiene es:

$$d_\infty(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

- Es claro que $d_\infty\leq 2$, ya que se obtiene calculando la distancia euclídea entre puntos de S, que tiene diámetro 2.
- Por otro lado como φ es un homeomorfismo y d_∞ es la distancia obtenida vía φ a partir de la distancia d_2 de S, se tiene que la topología de $\mathbb{C}_\infty$ es la asociada d_∞. Así $d_\infty|_{\mathbb{C}}$ es TOPOLÓGICAMENTE EQUIVALENTE a la distancia usual de $\mathbb{C}$.

✓ Sin embargo $d_\infty|_{\mathbb{C}}$ no es uniformemente equivalente a la distancia usual de $\mathbb{C}$. Efectivamente:

$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ no es de Cauchy $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ pero sí es de Cauchy en $(\mathbb{C}, d_\infty|_{\mathbb{C}})$, ya que converge a ∞ en $(\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$.

✓ Observar que: si consideramos la inversión: $z \longrightarrow 1/z$, entonces

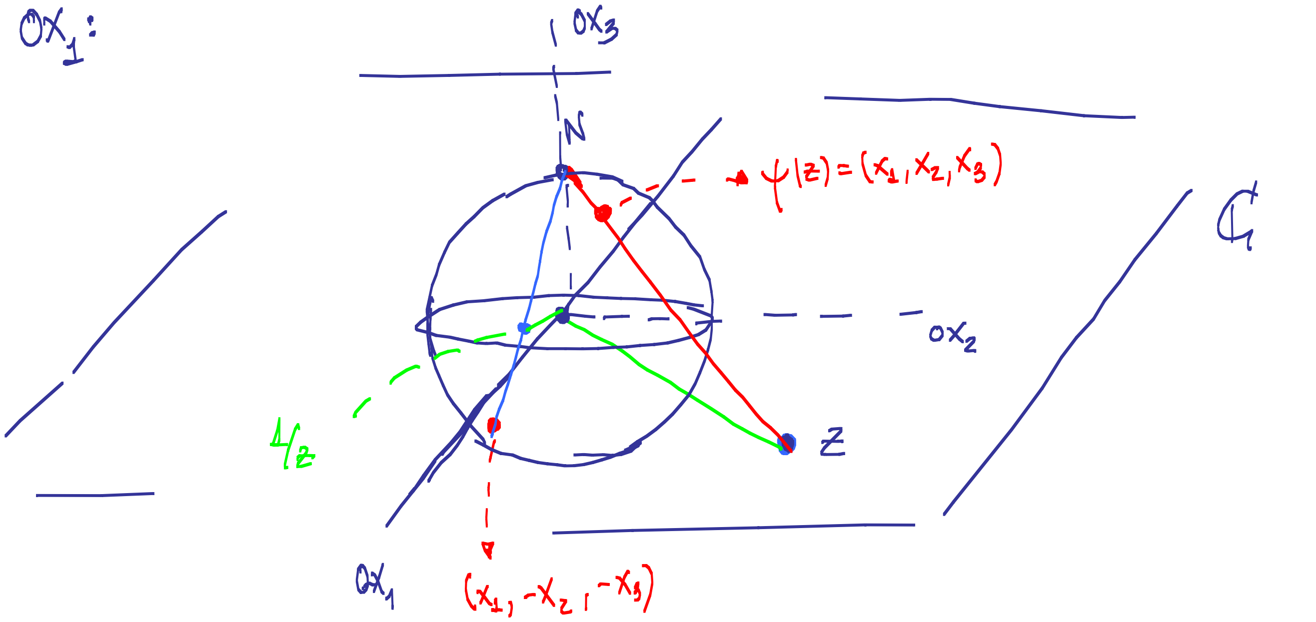
$$d_\infty(z,w) = d_\infty\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right)$$

Lo que se sigue inmediatamente de las fórmulas que estamos manejando. Observad también que $z \neq \infty$

$$\varphi(1/z) = \left(\frac{1/z + 1/\bar{z}}{1+|1/z|^2}, \frac{-i(1/z - 1/\bar{z})}{1+|1/z|^2}, \frac{|1/z|^2 - 1}{1+|1/z|^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{-i(\bar{z}-z)}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right) = (x_1, -x_2, -x_3)$$

donde $\varphi(z) = (x_1, x_2, x_3)$. Así, $z \longrightarrow 1/z$ interpretada en la esfera de Riemann es un giro de $180°$ alrededor del eje OX_1:



Transformaciones de Möbius

FINAL

Definición

Una *transformación de Möbius* es una aplicación $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ no constantes, definidas mediante funciones racionales de la forma:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \; ad-bc \neq 0$$

donde se utilizan los convenios habituales:

$$\begin{array}{ll} T(\infty) = a/c \;\; \text{y} \;\; T(-d/c) = \infty & \text{si} \;\; c \neq 0 \\ T(\infty) = \infty & \text{si} \;\; c = 0. \end{array}$$

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es el conjunto de las transformaciones de Möbius.

Ejemplo

Las aplicaciones

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ son transformaciones de Möbius que llevan el disco unidad en si mismo.

Proposición

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es un grupo para la composición de aplicaciones.

1. Si $T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$ con $a_i d_i - b_i c_i \neq 0$, $(i = 1, 2)$, entonces $T = T_1 \circ T_2$ se puede escribir en la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

2. Si $T(z) = \frac{az+b}{bz+d}$ es una transformación de Möbius, entonces $T^{-1}(w) = \frac{dw+b}{-cw+a}$.
3. $\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ se identifica como grupo con el de las matrices complejas inversibles 2×2 donde se han identificado las matrices que difieren en un múltiplo escalar no nulo.

Definición

FINAL

Las transformaciones de Möbius elementales son:

Traslaciones:	$z \to a + z, (a \in \mathbb{C})$	Giros:	$z \to e^{i\alpha} z, (\alpha \in \mathbb{R})$
Dilataciones:	$z \to rz, (r > 0)$	Inversión:	$z \to 1/z$

Proposición

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ está generado por las transformaciones elementales.

Demostración.- Sea $S \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$; vamos a expresar S como composición de transformaciones de Möbius elementales. Si

FINAL

$$Sz = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0$$

Tenemos dos casos:

$\boxed{c = 0}$

$$Sz = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = S_2 \circ S_1(z) \text{ donde}$$

$$S_1(z) = \frac{a}{d} z$$

$$S_2(z) = z + b/d.$$

$\boxed{c \neq 0}$

$$Sz = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c} z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{z + d/c} =$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{a}{c} \cancel{z} + \frac{b}{c} & z + \frac{d}{c} \\ -\frac{a}{\cancel{c}} \cancel{z} - \frac{ad}{c^2} & \frac{a}{c} \end{array}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z + d/c} =$$

$$= S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1(z)$$

donde $S_1(z) = z + d/c$; $S_2 z = 1/z$; $S_3(z) = \dfrac{bc-ad}{c^2} z$;

$$S_4 z = \frac{a}{c} + z.$$

#

Proposición

Sea $T(z) = \frac{az+b}{bz+d}$ una transformación de Möbius.

1. Si T no es la identidad, entonces T tiene a lo más dos puntos fijos.
2. T queda unívocamente determinada por los valores que toma en tres puntos distintos.

Demostración.-

① ✓ Si T no es la identidad y $T(\infty)=\infty$ entonces $Tz = az+b$ con $a \neq 0$, en cuyo caso hay otro punto fijo que es la solución de $az+b=z$

✓ Si T no fija el infinito entonces $c \neq 0$ y así los puntos fijos son las soluciones de $\frac{az+b}{cz+d} = z$ ⟶ que corresponden a las raíces en $\mathbb{C}$ de un polinomio de segundo grado.

② Si suponemos que T y $S \in M(\mathbb{C}_\infty)$ y existen z_2, z_3, z_4 distintos tales que: $T(z_i) = S(z_i)$ $i=2,3,4$, entonces

$S \circ T^{-1} \in M(\mathbb{C}_\infty)$ que tiene tres puntos fijos ⟶

$S \circ T^{-1} = id$ ⟶ $S = T$. #

Corolario

Dada una terna z_2, z_3, z_4 formada por tres puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$, si w_2, w_3, w_4 es otra terna en las mismas condiciones, existe una única transformación de Möbius T que transforma la primera terna en la segunda, es decir, $T(z_i) = w_i$, $i = 2, 3, 4$.

Demostración.- Dados z_2, z_3, z_4 distintos vamos a escribir una transformación $R: \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ tal que

$R(z_2) = 1$, $R(z_3) = 0$, $R(z_4) = \infty$

Distinguimos varios casos:

- $R(z) = \dfrac{\frac{z-z_3}{z-z_4}}{\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}}$; $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$
- $R(z) = \dfrac{z-z_3}{z-z_4}$; $z_2 = \infty$
- $R(z) = \dfrac{z_2-z_4}{z-z_4}$; $z_3 = \infty$
- $R(z) = \dfrac{z-z_3}{z_2-z_3}$; $z_4 = \infty$

De forma similar podemos construir $S: \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ con, $S(w_2) = 1$, $S(w_3) = 0$ y $S(w_4) = \infty$.

Entonces $T = S^{-1} \circ R$ es la transformación deseada. #

Definición

Dada una cuaterna ordenada z_1, z_2, z_3, z_4 formada por puntos de $\mathbb{C}_\infty$, donde los tres últimos z_2, z_3, z_4 se suponen distintos, se define la razón doble (z_1, z_2, z_3, z_4) como la imagen de z_1 mediante la única transformación de Möbius R que verifica

$$R(z_2) = 1, R(z_3) = 0, R(z_4) = \infty.$$

Proposición

La razón doble es un invariante para las transformaciones de Möbius: Si $T \in \mathbb{M}$ y z_1, z_2, z_3, z_4 son puntos de $\mathbb{C}_\infty$, (donde z_2, z_3, z_4 se suponen distintos) se cumple:

FINAL

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

Demostración.- Sea $R: \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ la transformación de Möbius tal que $z_2 \longrightarrow 1$, $z_3 \longrightarrow 0$ y $z_4 \longrightarrow \infty$. Consideremos

$R \circ T^{-1} : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$. Observamos que

$$R \circ T^{-1}(Tz_2) = S(z_2) = 1$$
$$R \circ T^{-1}(Tz_3) = S(z_3) = 0 \quad \text{y} \quad R \circ T^{-1}(Tz_4) = R(z_4) = \infty$$

Luego, para cualquier $w \in \mathbb{C}_\infty$ se tiene que

$$R \circ T^{-1}(w) = (w, Tz_2, Tz_3, Tz_4) \xrightarrow{w = Tz}$$

$$(z, z_2, z_3, z_4) = R(z) = R(T^{-1}(Tz)) = (Tz, Tz_2, Tz_3, Tz_4) \#$$

Ejemplo

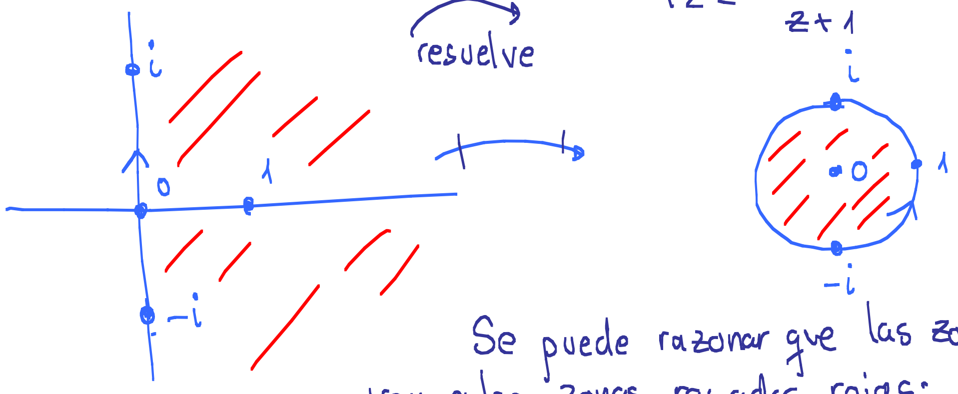
Encontrar una transformación de Möbius T tal que $T(i) = i, T(0) = -1$ y $T(-i) = -i$.

Resolución.- Planteamos la igualdad

$$(z, i, 0, -i) = (Tz, i, -1, -i)$$ que conduce a

$$\frac{\frac{z-0}{z+i}}{\frac{i}{2i}} = \frac{\frac{Tz+1}{Tz+i}}{\frac{i+1}{2i}} \rightsquigarrow \frac{Tz+1}{Tz+i} \cdot \frac{i}{\cancel{2i}} = \frac{z}{z+i} \cdot \frac{i+1}{\cancel{2i}}$$

$\xrightarrow{\text{se resuelve}}$ $Tz = \dfrac{z-1}{z+1}$



Se puede razonar que las zonas rayadas rojas van a las zonas rayadas rojas: sólo hace falta utilizar un sencillo argumento de conexión. #

Proposición

Sea C la circunferencia (en sentido amplio) determinada por tres puntos distintos z_2, z_3, z_4 de $\mathbb{C}_\infty$. Entonces, $z \in C$ si y sólo si $(z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}_\infty$.

FINAL

Demostración.- La ecuación general de una circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$ es

$$A z\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0 \qquad A, D \in \mathbb{R},\quad B = \bar{C},\quad AD - BC < 0$$

Sea $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$ definida por $Tz = (z, z_2, z_3, z_4)$

La condición $Tz \in \mathbb{R}$ significa $z \neq z_4$ y $Tz = \overline{Tz}$ i.e.

$$z \neq -d/c \quad \text{y} \quad \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} \iff$$

$$(az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) = (cz+d)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b}) \iff$$

$$(*)\ \left\{ \underbrace{i\,(a\bar{c} - c\bar{a})}_{A}\, z\bar{z} + \underbrace{i\,(a\bar{d} - c\bar{b})}_{B}\, z + \underbrace{i\,(b\bar{c} - d\bar{a})}_{C}\, \bar{z} + \underbrace{i\,(b\bar{d} - \bar{b}d)}_{D} = 0 \right\}$$

$\curvearrowright$ $A, D \in \mathbb{R}$ $\quad B = \bar{C}$ y

$$AD - BC = -[(a\bar{c} - c\bar{a})(b\bar{d} - \bar{b}d) - (a\bar{d} - c\bar{b})(b\bar{c} - d\bar{a})] =$$

$$= -[\cancel{a\bar{c}b\bar{d}} - a\bar{c}\bar{b}d - c\bar{a}b\bar{d} + \cancel{c\bar{a}\bar{b}d} - [\cancel{a\bar{d}b\bar{c}} - a\bar{d}d\bar{a} - c\bar{b}b\bar{c} + \cancel{c\bar{b}d\bar{a}}]] =$$

$$= -[|ad|^2 + |bc|^2 - ad\overline{bc} - \overline{ad}\,bc] = -|ad - bc|^2 < 0$$

y por lo tanto

$Tz \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \iff z$ satisface $(*)$ que significa que z está en una recta.

Corolario

Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias (en sentido amplio).

FINAL

Demostración.- Sea C una circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$ determinada por los puntos $z_2, z_3, z_4 \in C$ que son distintos. y T una transformación de Möbius. Los puntos Tz_2, Tz_3, Tz_4 son distintos y determinan una circunferencia C^*. Entonces

$$z \in C \iff \mathbb{R} \cup \{\infty\} \ni (z, z_2, z_3, z_4) = (Tz, Tz_2, Tz_3, Tz_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \iff$$

$$\iff Tz \in C^* \quad \#$$

NOTA: La demostración de que las transformaciones de Möbius, llevan círculos en sentido amplio en círculos en sentido amplio se puede hacer utilizando que toda transformación de Möbius, es composición de traslaciones, giros, homotecias y la inversión. Todos generadores llevan circunferencias en circunferencias: para ver que la inversión $z \rightsquigarrow 1/z$ lleva circunf. a circunf. basta observar que cambiando $z \leftrightarrow 1/z$ en una ecuación de la forma

$$(*) \quad Az\cdot\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0 \qquad \begin{array}{l} A, D \in \mathbb{R} \\ B = \bar{C} \\ AD - BC < 0 \end{array}$$

obtenemos una ecuación similar, así como $(*)$ es la ecuación de una circunferencia, por $z \to 1/z$ se transforma en otra ecuación del mismo tipo.

Corolario

Dados dos círculos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ de $\mathbb{C}_\infty$, existe una transformación de Möbius tal que $T(\mathbf{C})=\mathbf{C}'$.

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$ pasando por tres puntos distintos z_2, z_3 y z_4 se dice que $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$ son simétricos respecto de $\mathbf{C}$ si

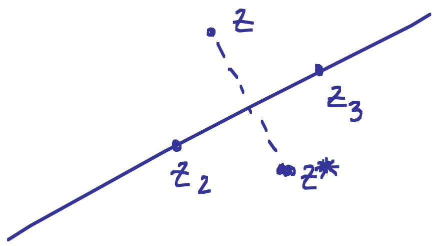
$$(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}.$$

Interpretación de la simetría

La noción de simetría definida anteriormente corresponde a las clásicas definiciones de simetría respecto de una recta o circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

FINAL

CASO 1.- Sea C una recta



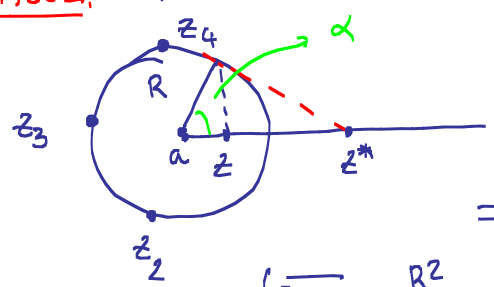
$z_4=\infty \qquad R(z)=\dfrac{z-z_3}{z_2-z_3}$

z simétrico $\Leftrightarrow$ $R(z)=\overline{R(z^*)}$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{z-z_3}{z_2-z_3}=\overline{\frac{z^*-z_3}{z_2-z_3}} \Leftrightarrow$$

z^* simétrico en sentido usual respecto de la recta..

CASO 2.- Sea $C=\{z\in\mathbb{C}: |z-a|=R\}$



$$(z^*, z_2, z_3, z_4)=\overline{(z, z_2, z_3, z_4)}=$$

$$=\overline{(z-a, z_2-a, z_3-a, z_4-a)}=$$

$$=(\overline{z-a}, \overline{z_2-a}, \overline{z_3-a}, \overline{z_4-a})=$$

$$=\left(\overline{z-a}, \frac{R^2}{z_2-a}, \frac{R^2}{z_3-a}, \frac{R^2}{z_4-a}\right)=\left(\frac{R^2}{\overline{z-a}}, z_2-a, z_3-a, z_4-a\right)=$$

$$=\left(\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}+a, z_2, z_3, z_4\right) \quad z^*=\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}+a=\frac{R^2}{|z-a|^2}(z-a)+a$$

✓ z^* está en la recta que une z con a.

✓ $|z^*-a|\,|z-a|=R^2$ · observar $\cos\alpha=\dfrac{|z-a|}{R}=\dfrac{R}{|z^*-a|}$ #

El alumno puede comprobar como ejercicio que $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es tal que $T(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sii podemos representar T de forma que $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

De esta forma es fácil ver que la definición de simetría que hemos dado no depende de los puntos $z_2, z_3, z_4 \in C$ elegidos.

Principio de simetría

Si z, z^* son puntos simétricos respecto a una circunferencia $\mathbf{C}$ y $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es una transformación de Möbius entonces $T(z)$ y $T(z^*)$ son simétricos respecto a la circunferencia imagen $T(\mathbf{C})$.

FINAL

Demostración.- Consecuencia inmediata de que las transformaciones de Möbius conservan la razón doble #

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$, una orientación en $\mathbf{C}$ es dar una terna de puntos distintos $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$. La orientación en sentido contrario es z_2, z_4, z_3.

FINAL

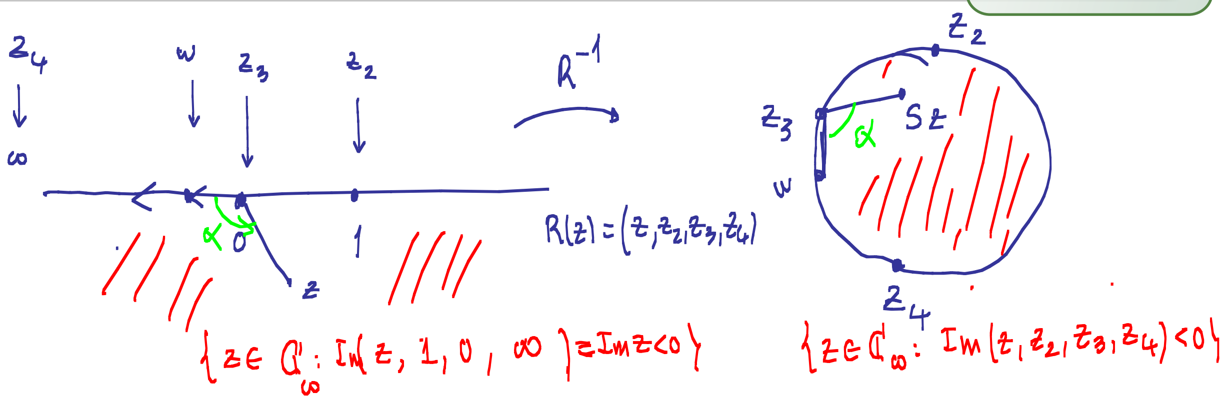
Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$ y una orientación en $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$, llamamos lado izquierdo, resp. derecho, de $\mathbf{C}$ respecto de la orientación a

$$\text{Lado Izqdo}\mathbf{C}_{(z-2,z_3,z_4)} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) < 0\}.$$

$$\text{Lado Der.}\mathbf{C}_{(z-2,z_3,z_4)} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) > 0\}$$

FINAL



El principio de conservación de las orientaciones

Si circunferencia $\mathbf{C}$ se orienta mediante la terna (z_2, z_3, z_4) y la imagen $T(\mathbf{C})$ se orienta mediante la terna imagen $(T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ entonces T transforma el lado izquierdo (resp. derecho) de $\mathbf{C}$ en el lado izquierdo (resp. derecho) de $T(\mathbf{C})$.

$\Omega_1 \xrightarrow{T} \Omega_2$

Semiplano abierto	Disco abierto
Cuadrante abierto	Semidisco
Región limitada por circunferencias tangentes	Región limitada por dos rectas paralelas
Región limitada por circunferencias que no se cortan	Corona circular $A(0, r, R)$, (*)

Problema

1. Pruébese que una transformación de Möbius T deja fijo $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ si, y sólo si, T puede escribirse como

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ ad - bc \neq 0.$$

2. Dedúzcase de lo anterior que la definición de simetría respecto de un círculo dada a través de la razón doble, es independiente de los tres puntos distintos elegidos en el círculo.
3. Pruébese con un argumento de conexión que si T es una transformación de Möbius que lleva una recta en una circunferencia y un punto de un semiespacio determinado por la recta va al interior del disco determinado por la circunferencia, entonces la imagen de ese semiespacio es exactamente el interior de la circunferencia.